DEVOIR MAISON IV CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Correction 1 *Comparaisons de suites et de fonctions.*

1. **VRAI** On a $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\ln(x)} = 0$.
2. **FAUX** On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+x+x^2/2} = +\infty$. Cette relation est éventuellement vraie en 0 encore que $1+x+x^2/2$ est lui-même équivalent à 1.
3. **FAUX** On ne peut pas conclure ça et un contre-exemple est donné par $u_n = n^2$ qui vérifie bien l'encadrement mais qui n'est pas équivalente à n.
4. **VRAI** On a $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{(n-1)(n+1)}$ puis le dénominateur est équivalent à n^2 et on conclut par passage au quotient des équivalents.
5. **FAUX** On a $2\sqrt{1+x} - 2 - x = 2\left(1 + x/2 - \frac{x^2}{8}\right) - 2 - x + \underset{0}{\mathbf{o}}\left(x^2\right) = -\frac{x^2}{4} + \underset{0}{\mathbf{o}}\left(x^2\right)$. On en déduit que la fraction est équivalente à $\frac{-1}{8}$.
6. **FAUX** Seule la fonction nulle est équivalente à 0. Il est vrai en revanche que la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)$ tend vers 0 en 0.
7. **VRAI** On a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ et chacun des termes du produit au numérateur est équivalent à n (et il y en a k). On conclut en passant les équivalents au quotient.
8. **FAUX** On a $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{\frac{1}{n}+\mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$ et on constate que la fonction tend vers 1. Remarque : c'est $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ qui tend vers e^2 (par le même calcul).
9. **VRAI** On a $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ qui tend bien vers 0. On rappelle que $\mathbf{o}(1)$ désigne une suite qui tend vers 0.
10. **VRAI** C'est la composition d'un DL classique en 0 avec la fonction carrée. Remarquer que le $\mathbf{o}\left(x^3\right)$ est en fait un $\mathbf{o}\left(x^4\right)$. Écrire $\mathbf{o}\left(x^3\right)$ n'est pas faux (mais c'est moins précis).
11. **VRAI** C'est immédiat, cela provient du fait que $x^2 - 3x$ tend vers 0 en 0.
12. **FAUX** Cela impliquerait que $x^2 - 3x$ tend vers 0 en 1, ce qui est faux.
13. **VRAI** Provient du DL ou de l'équivalent classique de ln lorsque x est proche de 1. Noter que les deux membres de l'équivalence sont eux-mêmes équivalents à 1.
14. **VRAI** La preuve ne consiste pas à ajouter les équivelents, c'est interdit. Mais ici, on a
$$\frac{u_n+v_n}{2u_n} = \frac{u_n}{2u_n} + \frac{v_n}{2u_n} \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Correction 2 *Suites et séries.*

Date: 8 Janvier 2024.
http://louismerlin.fr.

1. **FAUX** Ce n'est pas ce que dit le cours : il faut regarder le signe de $u_1 - u_0$. Pour un contre-exemple, on peut prendre par exemple $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et la suite récurrence définie par $u_0 = \frac{1}{2}$. On vérifiera que cette suite est en fait décroissante.
2. **FAUX** et même gravement faux. Pour un contre-exemple, on peut prendre la série harmonique.
3. **FAUX** mais cela devient vrai si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. Pour un contre exemple, on peut prendre par exemple, $u_n = -2^n$.
4. **VRAI** On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{3/2}}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang et on peut appliquer un théorème de comparaison à une série de Riemann convergente.
5. **FAUX** mais c'est délicat. On peut prendre pour contre-exemple la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$.
6. **VRAI** On a
$$\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) - 2n(n+2) + n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$$
et on peut conclure par comparaison à une série de Riemann.
7. **VRAI** Si elle convergeait alors $\sum v_n = \sum (u_n) - (u_n - v_n)$ convergerait aussi par un théorème du cours (une combinaison linéaire de séries convergentes est convergente).
8. **VRAI** La suite des somme partielle est en effet croissante et majorée.
9. **VRAI** $u_n^2 \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et on conclut par comparaison.
10. **FAUX** La suite ne tend pas vers 0
$$u_n = e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{n^2\left(\frac{1}{n} + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n + \mathbf{o}(n)}.$$
11. **FAUX** Pour qu'une série converge, il faut que son terme général tende vers 0 (mais ça ne suffit pas). Or ici, raisonnons par l'absurde pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Si c'était le cas alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ puis, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on aurait
$$0 = \frac{0+1}{2},$$
ce qui est absurde.
12. **VRAI** et c'est un peu plus difficile. On montre tout de suite par récurrence sur $\mathbb{N}$ que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. Puis on a donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{e^n u_n} > 0$. La suite est donc croissante, de sorte que soit elle est bornée et elle converge, soit elle est non bornée et diverge vers $+\infty$. Raisonnons par l'absurde pour montrer qu'elle est bornée : supposons donc qu'elle ne l'est pas. On a alors
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{e^n u_n} = \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(e^{-n}\right).$$
La série de terme général e^{-n} converge et par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. Mais cette série est de même nature que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction 3 *Espaces vectoriels.*

1. **FAUX** Il contient toujours le vecteur 0 mais (sauf si l'espace vectoriel est $\mathbb{R}$), le vecteur nul n'est pas le nombre réel 0.
2. **VRAI**
3. **VRAI**

4. **FAUX** C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (mais il est de dimension 2).
5. **VRAI** Les vecteurs $(1,0,0)$ et $(1,-1,0)$ par exemple.
6. **VRAI** Les deux espaces sont d'ailleurs $\mathbb{R}^2$ lui-même.
7. **FAUX** Les trois vecteurs du premier espaces sont tous colinéaires. Ainsi $\text{Vect}\left((1,1),(2,2),(3,3)\right) = \text{Vect}((1,1))$ tandis que l'espace de droite est toujours égal à $\mathbb{R}^2$.
8. **FAUX** On a une combinaison linéaire nulle et non triviale de ces trois vecteurs, par exemple
$$\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{2}(X^2+1)-X^2=0.$$
9. **FAUX** Si $u_3 \in \text{Vect}(u_1,u_2)$, alors u_3 est une combinaison linéaire de u_1 et u_2 et il existe donc une combinaison linéaire nulle et non triviale de u_1,u_2,u_3.
10. **VRAI** C'est un résultat du cours : si on retire à une famille génératrice, un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue reste génératrice.
11. **VRAI** Les 4 premières matrices suffisent d'ailleurs à engendrer $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
12. **VRAI** C'est la définition des coordonnées.

Correction 4 *Intégration.*

1. **FAUX** Un contre exemple est donné par $f(t)=\frac{1}{t}$.
2. **FAUX** On prend une fonction qui est donnée par
$$f(t)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{si} \quad t \leqslant 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}.$$
Elle est absolument intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Mais $\frac{f(t)}{t}$ n'est pas intégrable en 0.
3. **VRAI** L'intégrale n'est impropre qu'en 0 et on a
$$\frac{e^{t^2}-1}{t} \underset{t\to 0}{\sim} t$$
donc la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable.
4. **FAUX** En 0, on a
$$\frac{1}{t+t^4} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$$
et la fonction $t \to \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0.
5. **FAUX** Ça n'est vrai que si en plus la fonction f est intégrable en $\pm\infty$. Pour un contre exemple, on peut donc prendre $f(t)=t$.
6. **VRAI** L'hypothèse implique que $f = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t^3}\right)$ donc que $tf(t) = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi $t \to tf(t)$ est intégrable en $+\infty$. Par ailleurs, si f est paire, alors $t \to tf(t)$ est impaire. Donc on en déduit que $t \to tf(t)$ est aussi intégrable en $-\infty$ et l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle.
7. **VRAI** La fonction n'est impropre qu'en $+\infty$ et on a
$$\frac{\ln(1+t)^2}{(1+t)^2} = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$
par croissances comparées. On conclut avec le théorème de comparaison des fonctions positives.
8. **VRAI** On fait le changement de variables $u=\ln(t)$ (sur un intervalle borné, puis on passe à la limite).

9. **FAUX** Pour un contre exemple, on prend la fonction qui vaut -1 sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et qui vaut 2 sur le reste de l'intervalle.
10. **VRAI** C'est du cours.
11. **VRAI**

Correction 5 *Applications linéaires.*

1. **FAUX** Il faut que $\dim \operatorname{Ker}(f) = 0$ et pas 1.
2. **FAUX** Les deux premières colonnes sont colinéaires donc le noyau est au moins de dimension 1, donc l'application linéaire associée à la matrice n'est pas injective. L'application linéaire (et donc la matrice) n'est pas inversible.
3. **FAUX** Ce n'est pas la matrice de l'application dans la base canonique (il faudrait remplacer le 2 de la dernière colonne par un 4).
4. **VRAI** On vérifie facilement que sa matrice est inversible.
5. **VRAI** Par le théorème du rang, on obtient bien que $\dim \operatorname{Ker}(f) = 0$.
6. **FAUX** Il faut que $\operatorname{rg}(f)$ soit égale à $\dim(F)$.
7. **FAUX** Si on note e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique, alors $e_3 - 2e_1$ est aussi dans le noyau et n'est pas colinéaire à e_1.
8. **VRAI** Soit $P(X)$ un polynôme annulateur de f. Puisque $f \circ f = 0$, ce polynôme annulateur ne contient qu'un terme constant et un terme de degré 1. Ainsi f est colinéaire à Id
9. **VRAI**